

Modelo de predicción para las frecuencias naturales en una viga euler bernoulli con módulo de elasticidad con variación espacial

Olga Luévano, Mario Cantú, Héctor Hernández y Mario Osorio

O. Luévano, M. Cantú, H. Hernández y M. Osorio.
Universidad Politécnica de Gómez Palacio
oluevano@upgop.edu.mx

M. Ramos.,V.Aguilera.,(eds.). Ciencias de la Ingeniería y Tecnología, Handbook -©ECORFAN- Valle de Santiago, Guanajuato, 2014.

Abstract

Generally, the mathematical models are constructed to represent real systems. In the materials without fracturing; the elastic mechanical properties are assumed as constant. One of them is the elastic modulus (constant in the constitutive equations of the materials homogeneous, continuous and isotropic). The thermomechanical processes on the material throughout the domain, modify the value of the elastic constant, producing a spatial variation in the studied parameter.

In this paper the finite element method (FEM) is used to calculate the vibrational modes of Euler Bernoulli beam, with 8 holes aligned to the centre and distributed along the beam. Assuming that the elastic modulus at each point is constant but varies spatially. The results of model are compared with experimental data using two metrics, square error (MSE) and modal assurance criteria (MAC).

8 Introducción

En los análisis deterministas de estudios estructurales, los parámetros de las propiedades elásticas de los materiales son fijos. Estos valores están establecidos para cada material. Sin embargo, en la literatura revisada se plantea que en los materiales homogéneos, el módulo de elasticidad varía de un segmento a otro de la misma pieza (Wenhui, 2010). Especialmente en segmentos en los que su geometría es modificada a través de procesos de corte, troquel o taladrado, debido al incremento de la concentración de esfuerzos en las secciones adyacentes donde se aplicó el proceso (Yang et al, 2009). Hufnagel (1992) reporta, en el aluminio, valores del módulo de elasticidad de 60 a 78 kN/mm² y establece en un promedio de 70 kN/mm² que es el valor usado de manera general. Tales medidas muestran que existe variabilidad en el módulo de elasticidad, y su valor depende de los procesos termomecánicos a los que fue sometido y los métodos utilizados para su medición. Con base en lo anterior, es importante considerar la variación espacial del módulo de elasticidad en los procedimientos de análisis físico de los sistemas.

Un método muy usado en análisis estructural es el de los elementos finitos (MEF). Este es un método numérico determinista que utiliza parámetros conocidos de las propiedades de los materiales como valores fijos y constantes. Asimismo, se desarrollan dos vertientes de análisis que consideran la posibilidad de variación de estos parámetros: 1) Aleatoriedad en los parámetros (método de elemento finito estocástico) y 2) Incertidumbre en los parámetros (método de elemento finito difuso). Estos son confirmados y mencionados en el estado del arte del método de los elementos finitos estocástico por Stefanou (2008), Vélez et al (2009) y Xiao et al (2011).

Entre las estrategias utilizadas para considerar la variabilidad espacial del módulo de elasticidad en el MEF, Mthembu et al (2011) seleccionan el ajuste del modelo de elemento finito usando evidencia estadística bayesiana. Aplicada a una viga H asimétrica, asignando diferentes valores del módulo elástico a los elementos, lo cual depende de su ubicación sobre la superficie y la cercanía con secciones de la geometría sometida a diferentes esfuerzos. Wenhui (2010) aplica el método de elemento finito estocástico para analizar la vibración estructural en una viga en voladizo. En este caso, establece la importancia del método de discretización a utilizar para reducir tiempo y costo computacional. En su caso utilizó el método de punto medio para la discretización.

En este trabajo se desarrolla un modelo de elementos finitos estocástico para analizar una viga metálica de aluminio Euler Bernoulli suspendida libremente. Sometida a perturbación, en la que se aplica aleatoriedad al módulo de elasticidad, y se obtienen resultados muy cercanos a los valores experimentales.

8.1 Materiales y Métodos

Método de los elementos finitos en vigas.

En el marco conceptual del método de los elementos finitos (MEF), es un método numérico para resolver sistemas cuyo comportamiento es descrito mediante ecuaciones constitutivas de la física representadas con ecuaciones diferenciales parciales (Zienkiewicz, 2009). Convirtiendo una ecuación constitutiva en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales. En el caso de los sistemas estructurales y con base en la Teoría de Euler Bernoulli en vigas, considera la deformación por flexión (Logan, 2007). El momento y la fuerza de corte están relacionadas con el desplazamiento transversal a través de:

$$\hat{m}(\hat{x}) = EI \frac{d^2 \hat{v}}{d\hat{x}^2} \quad \hat{V} = EI \frac{d^3 \hat{v}}{d\hat{x}^3} \quad (8)$$

Donde $\hat{m}(\hat{x})$ se refiere al momento flector, E representa el módulo de elasticidad, I es el momento de inercia, \hat{V} es la fuerza de corte, y \hat{v} es la función de desplazamiento. El análisis estático de una viga Euler Bernoulli está basado en la ecuación (1). En situaciones de análisis dinámico se incluye la segunda ley de Newton, $F = ma$, la cual aparece en:

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \quad (8.1)$$

En este caso, m representa la masa, k se refiere a la rigidez del sistema (material) y $F(t)$ a la fuerza aplicada en el sistema. En términos de la representación de matrices para elemento finito, en donde e representa cada elemento:

$$\{F(t)\} = [K]\{d\} + [M]\{\ddot{d}\} \quad (8.2)$$

donde:

$$[K] = \sum_{e=1}^N [k^{(e)}] \quad [M] = \sum_{e=1}^N [m^{(e)}] \quad [F] = \sum_{e=1}^N [f^{(e)}] \quad (8.3)$$

La libre vibración de la masa ocurre con la solución homogénea de la ecuación (3), así $F(t) = 0$, y la solución estándar para $\{d(t)\}$ está dada por la ecuación armónica en el tiempo:

$$\{d(t)\} = \{d'\} e^{i\omega t} \quad (8.4)$$

Donde d' , es la matriz de los desplazamientos nodales llamados modos naturales y, es asumido como independiente del tiempo, i es el número imaginario estándar y ω es la frecuencia natural. Diferenciando con respecto al tiempo y sustituyendo en (3), tenemos:

$$e^{i\omega t} ([K] - \omega^2 [M]) \{d'\} = 0 \quad (8.5)$$

La ecuación (6) es un conjunto de ecuaciones lineales en términos de desplazamientos modales $\{d\}$ igualado a cero, entonces tenemos:

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0 \quad (8.6)$$

Si $\lambda = \omega^2$, entonces $\omega = \sqrt{\lambda}$, por lo tanto:

$$|[K] - \lambda[M]| = 0 \quad (8.7)$$

La ecuación (8), representa el modelo de elementos finitos para la obtención de las frecuencias naturales en el análisis vibracional. Donde $[K]$ es la representación matricial de la rigidez:

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

E representa el módulo de elasticidad, I el momento de inercia, L la longitud del elemento viga.

Módulo de elasticidad.

Dentro de los límites elásticos de un material metálico, es sabido que la relación de los valores tomados de la pendiente, en la curva esfuerzo–deformación, deduce una constante (Ley de Hooke) (Mott, 1996) (Ashby, 2005). Conocida como módulo elástico o de Young (E). Al considerarse constante, se tienen establecidos valores para infinidad de materiales considerados homogéneos y continuos. Incluso en términos más complejos como son los materiales compuestos.

$$\text{Módulo de Elasticidad} = \frac{\text{Esfuerzo longitudinal}}{\text{Deformación longitudinal}} \quad (8.9)$$

Reportes en la literatura (Wenhui, 2010) (Hufnagel, 1992) (Mthembu et al, 2011), establecen el módulo de elasticidad como variable aún en un mismo material. Describiendo la propiedad elástica del material como variable espacialmente y como una propiedad aleatoria cuyo comportamiento se explica mediante una distribución de probabilidad. Otros estudios reportan mediciones del módulo de elasticidad en materiales como el aluminio por medio de nano indentación (Yabushita et al, 2008) encontrando valores en un rango de 71 ± 3 GPa.

Módulo de elasticidad aleatorio.

Para usar un módulo de elasticidad variable en el espacio cuando se utiliza el MEF, es conveniente que el espacio aleatorio del módulo de elasticidad se discretize en el mismo sentido que el dominio continuo del MEF, de esta manera se obtiene un parámetro por cada nodo y posteriormente la media del parámetro en cada elemento, ya que un nodo puede estar relacionado con más de un elemento, se establece cierto grado de correlación entre los elementos que comparten nodos.

La ecuación (9) que representa la rigidez del sistema, requiere de tres parámetros fijos: el módulo de elasticidad, la longitud y la inercia, en este caso la longitud y la inercia se mantienen fijos

pero el módulo de elasticidad es considerado un parámetro fijo que varía en el espacio, del que sólo se conoce el valor promedio general.

Un vector que se integra con los módulos de elasticidad para los n nodos, debe ser generado.

$$E = [E_1, E_2, E_3, \dots, E_n] \quad (8.10)$$

Asumiendo que el módulo de elasticidad varía espacialmente con una distribución normal con parámetros μ y σ , el vector generado es gaussiano. La ecuación (7) ya no es determinista, el valor de las frecuencias naturales ω es un valor aleatorio ya que su valor dependerá del valor que asuma el módulo de elasticidad.

En el MEF se asume que existe un valor esperado constante para un solo elemento, y ya que cada elemento tiene al menos dos nodos, entonces se obtiene la media del módulo de elasticidad para los N elementos usando los valores de cada uno de sus nodos. De la misma forma cada elemento comparte al menos un nodo con cada elemento vecino, por lo que cada nodo compartido contribuye a la media del módulo de elasticidad de al menos dos elementos diferentes. Esto significa que existe correlación (ecuación 12) entre los valores esperados de cada elemento con los elementos vecinos. Dicha correlación se obtiene con la matriz de covarianzas.

$$Cov_{E^i E^j} = \begin{bmatrix} \frac{Cov(E^1, E^1)}{Var(E^1)Var(E^1)} & \frac{Cov(E^1, E^2)}{Var(E^1)Var(E^2)} & \dots & \frac{Cov(E^1, E^N)}{Var(E^1)Var(E^N)} \\ \frac{Cov(E^2, E^1)}{Var(E^2)Var(E^1)} & \frac{Cov(E^2, E^2)}{Var(E^2)Var(E^2)} & \dots & \frac{Cov(E^2, E^N)}{Var(E^2)Var(E^N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{Cov(E^N, E^1)}{Var(E^N)Var(E^1)} & \frac{Cov(E^N, E^2)}{Var(E^N)Var(E^2)} & \dots & \frac{Cov(E^N, E^N)}{Var(E^N)Var(E^N)} \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

El vector de módulos de elasticidad para los elementos se obtiene, de la siguiente manera:

$$E = \mu_g + \sigma_g LZ \quad (8.12)$$

Donde μ_g representa la media y σ_g la desviación estándar generadas con los datos del método Montecarlo, Z es una matriz ortogonal resultante de una matriz de números aleatorios con distribución normal, media cero y varianza uno, y L se obtiene con la descomposición de Cholesky de la matriz de correlación.

Criterios de comparación

Criterio de Aseguramiento Modal (MAC por sus siglas en inglés, modal assurance criterion): Es una herramienta matemática para comparar dos vectores. Este se usa para investigar la validez de los modos estimados [13]. El MAC entre dos vectores $\{\psi\}_r$ y $\{\psi\}_s$ está definido como:

$$MAC(\{\psi\}_r, \{\psi\}_s) = \frac{(\{\psi\}_r^T \{\psi\}_s)^2}{(\{\psi\}_r^T \{\psi\}_r)(\{\psi\}_s^T \{\psi\}_s)} \quad (8.13)$$

El valor MAC se acercará a 1 si $\{\psi\}_r$ y $\{\psi\}_s$ son el mismo modo de forma. Si $\{\psi\}_r$ y $\{\psi\}_s$ son diferentes modos de forma, el valor MAC se alejará de 1 y tendrá un valor menor. El subíndice $i = 1, 2, \dots, n$, representa cada modo, y ω_i representa la frecuencia.

Posteriormente, suma los resultados de todas estas distancias para seleccionar el modelo que tenga el mínimo valor de la suma del error cuadrado.

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2 \quad (8.14)$$

Procedimiento experimental.

Se considera una viga de aluminio homogénea y continua. Discretizada en 11 elementos de igual tamaño, las especificaciones de la viga son: 1100 x 210 x 10.6 mm.

La viga tiene orificios de 5.8 mm de diámetro localizados en el centro de los elementos 2 al 9 (ver figs. 1 y 2). Esto complica su modelado, más detalles de esta viga son reportados en Marwal (2010) (1997). La viga es suspendida libremente usando bandas elásticas. Con el objetivo de perturbarla mediante un agitador electromagnético. La respuesta es medida por un acelerómetro en 10 posiciones diferentes (ver fig. 2). Finalmente, se considera que el módulo elástico en el aluminio se distribuye normalmente con media 72×10^9 GPa y varianza 0.55×10^{20} GPa, con base en un estudio de Mthembu (2011).

Figura 8. Viga de aluminio Euler – Bernoulli

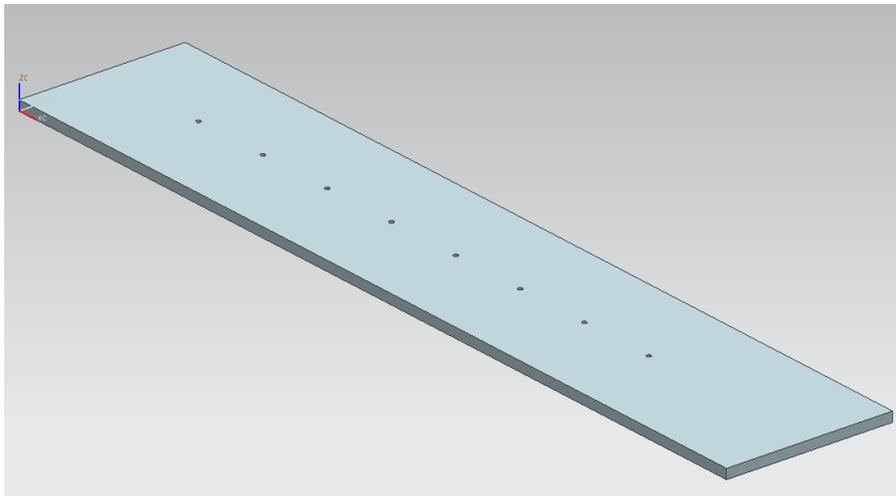
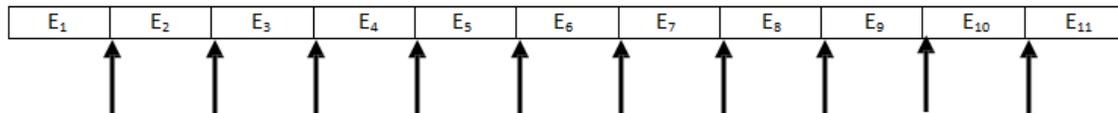


Figura 8.1 Viga con orificios, libremente suspendida, la aceleración fue medida sobre los 10 puntos indicados; los elementos son numerados de izquierda a derecha



Considerando que el módulo de elasticidad tiene variación espacial, se establecen dos patrones de variación en la superficie de la viga (tabla 1). El primero asume que el módulo de elasticidad varía espacialmente a través de la viga, y el segundo considera que el módulo de elasticidad de los elementos sólidos es ligeramente mayor que el de los elementos con perforaciones.

Tabla 8. Patrones de variación del módulo de elasticidad en la viga Euler Bernoulli.

PATRÓN DE VARIACIÓN	MÓDULO DE ELASTICIDAD	ELEMENTOS
1	$E_{(1-11)}$	1 – 11
2	$E_{(1,10 \text{ y } 11)}$	1, 10 y 11
	$E_{(2-9)}$	2 – 9

Se realizó un modelo en MatLab® para resolver el análisis vibracional de una viga Euler Bernoulli con el método de los elementos finitos tradicional (determinista), posteriormente se le añadió un módulo generador de vectores de módulos de elasticidad aleatorios usando el método Monte Carlo, que considera los dos patrones de variación por separado, los resultados de los tres modelos usados (determinista, patrón de variación 1 y patrón de variación 2) se compararon con los resultados experimentales (tabla 2) y se analizaron los resultados.

Tabla 8.1 Frecuencias experimentales de los primeros cuatro modos de frecuencia

MODO	FRECUENCIA EXPERIMENTAL (Hz)
1	41.5
2	114.5
3	224.5
4	371.6

8.2 Resultados y discusión

Los vectores del módulo de elasticidad para cada patrón se obtuvieron con el método Monte Carlo, se generaron vectores con 23 módulos de elasticidad correspondientes a 23 nodos. Considerando que cada elemento tiene tres puntos de observación (nodos), la tabla 3 especifica los nodos correspondientes a cada elemento y el valor del módulo de la elasticidad esperado para cada elemento.

Tabla 8.2 Media y varianza del módulo de elasticidad por elemento.

ELEMENTO	NODOS	PATRÓN DE VARIACIÓN 1		PATRÓN DE VARIACIÓN 2	
		Media	Varianza	Media	Varianza
1	1, 2, 3	7.1103×10^{10}	2.67199×10^{19}	7.1064×10^{10}	2.93488×10^{19}
2	3, 4, 5	7.1089×10^{10}	2.66576×10^{19}	7.0977×10^{10}	3.94637×10^{19}
3	5, 6, 7	7.1087×10^{10}	2.65644×10^{19}	6.9299×10^{10}	3.49423×10^{19}
4	7, 8, 9	7.1081×10^{10}	2.66683×10^{19}	7.0595×10^{10}	2.52570×10^{19}
5	9, 10, 11	7.1084×10^{10}	2.66774×10^{19}	6.8897×10^{10}	2.82463×10^{19}
6	11, 12, 13	7.1089×10^{10}	2.64106×10^{19}	7.0661×10^{10}	2.82035×10^{19}
7	13, 14, 15	7.1104×10^{10}	2.63791×10^{19}	7.0653×10^{10}	2.51512×10^{19}
8	15, 16, 17	7.1080×10^{10}	2.65664×10^{19}	7.0596×10^{10}	2.75572×10^{19}
9	17, 18, 19	7.1079×10^{10}	2.66473×10^{19}	6.9951×10^{10}	3.06658×10^{19}
10	19, 20, 21	7.1112×10^{10}	2.67380×10^{19}	7.2965×10^{10}	2.79137×10^{19}
11	21, 22, 23	7.1115×10^{10}	2.67114×10^{19}	7.1693×10^{10}	2.88558×10^{19}

Los resultados obtenidos en el modelo programado en MatLab® se presentan en la tabla 4, se observa que son muy aproximados a los valores experimentales, para corroborarlo se usa el error cuadrado medio y el MAC. Los valores obtenidos tanto del error cuadrado medio como del MAC (tabla 5) muestran que la diferencia entre los valores MAC de los tres modelos con respecto a los datos experimentales son cifras del orden de 1×10^{-7} .

Lo cual no representa mucha diferencia, sin embargo, en la suma del error cuadrado medio si existen diferencias, mostrando que el modelo del patrón de variación 2 es el más aproximado a los datos reales.

Tabla 8.3 Frecuencias naturales para cada modelo

MODO	FRECUENCIA NATURAL (Hz)			
	EXPERIMENTAL	DETERMINISTA	PATRÓN DE VARIACIÓN 1	PATRÓN DE VARIACIÓN 2
1	41.5	41.99	41.70	41.60
2	114.5	116.60	115.79	115.25
3	224.5	227.37	225.78	224.58
4	371.6	375.15	372.54	370.68

Con un nivel de confianza de 95% se asume que el valor esperado para el módulo de elasticidad en el patrón de variación 1 se encuentra entre los valores de 69.21 y 72.97 GPa, y para el patrón de variación 2, el valor esperado del módulo de elasticidad está entre los valores 68.69 y 72.65 GPa, como se observa en la amplitud del intervalo, es mayor en el patrón de variación 2 que en el patrón de variación 1, lo cual parecería normal ya que en el patrón de variación 2 se asume que el módulo de elasticidad disminuye en los elementos con orificios al centro.

Tabla 8.4 Valores de los criterios de comparación para cada modelo

MODELO	MAC	Σ
DETERMINISTA	0.999994	25.4675
PATRÓN DE VARIACIÓN 1	0.999994	4.2193
PATRÓN DE VARIACIÓN 2	0.999994	1.4399

En cuanto a los resultados de las frecuencias naturales (tabla 6 y 7), se observa que los datos experimentales quedan dentro de los intervalos en ambos patrones de variación con un nivel de confianza de 95%, con excepción del modo 2 en el patrón 2, si se incrementa el nivel de confianza a 99% el modo de frecuencia 2 aún se queda fuera del intervalo.

Tabla 8.5 Intervalos de confianza para las frecuencias naturales con un nivel de confianza del 95%

Modo	Nivel de confianza de 95%						Valores Reales
	Patrón de Variación 1			Patrón de Variación 2			
	LI	LS	Rango	LI	LS	Rango	
1	41.14	42.25	1.11	41.4	41.81	0.41	41.5
2	114.25	117.32	3.08	114.74	115.77	1.03	114.5
3	222.78	228.78	6.00	223.60	225.55	1.94	224.5
4	367.59	377.49	9.90	369.16	372.19	3.04	371.6

Tabla 8.6 Intervalos de confianza para las frecuencias naturales con un nivel de confianza del 99%

Modo	Nivel de confianza de 99%						Valores Reales
	Patrón de Variación 1			Patrón de Variación 2			
	LI	LS	Rango	LI	LS	Rango	
1	40.99	42.41	1.42	41.34	41.87	0.53	41.5
2	113.82	117.75	3.93	114.60	115.91	1.32	114.5
3	221.95	229.61	7.66	223.34	225.81	2.48	224.5
4	366.22	378.86	12.65	368.74	372.61	3.88	371.6

8.3 Conclusiones

En los últimos años se ha dado mayor importancia al hecho de que la incertidumbre interviene en todos los sistemas reales, aún en aquellas propiedades consideradas fijas y constantes. Por ello los métodos deterministas como el Método de los Elementos Finitos se han ido modificando para integrar de alguna manera los efectos de la variación en los resultados del sistema analizado. Tal es el caso del Método de los Elementos Finitos Estocástico, en el que se consideran parámetros fijos con variación en el espacio integrados a la resolución de los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales generadas por el método.

En este estudio el módulo de elasticidad es un parámetro fijo con variación espacial, dicha variación se representó con dos patrones diferentes, uno que considera que se tiene el mismo valor esperado para el módulo de elasticidad en todos los elementos y otro que asume que el valor esperado del módulo de elasticidad es mayor en los elementos sólidos que en los elementos que tienen un orificio al centro.

En el análisis de resultados se encontró que los valores de frecuencia natural obtenidos con los tres modelos tienen una fuerte relación con los resultados experimentales ya que las diferencias entre el MAC de cada modelo es del orden de 1×10^{-7} , y el valor individual de los tres de 0.999994 está muy próximo a uno, lo que significa que los modos calculados están fuertemente relacionados con los modos obtenidos experimentalmente. La sumatoria del error cuadrado dio como resultado que el patrón de variación dos es el más aproximado a los datos reales, sin embargo al hacer la estimación del valor esperado con intervalos de confianza, el valor real del modo dos queda por debajo del límite inferior del intervalo en niveles de confianza de 95% y 99%. Aún con estos resultados cabe resaltar la importancia de considerar la variación del módulo de elasticidad debida a los procesos a los que se somete el material con fin de lograr una geometría deseada, lo que afecta el desempeño de la pieza para las funciones que es fabricada.

Desde el punto de vista mecánico-metalúrgico, sería interesante obtener los valores del módulo de elasticidad por zona en una viga, así como establecer condiciones de endurecimiento y ablandamiento por procesos de remoción de material. Empatando las condiciones semejantes en este estudio. Especialmente en las zonas cercanas al límite del orificio para coadyuvar el método de los elementos finitos.

8.5 Referencias

- Ashby MF. (2005), *Materials Selection in Mechanical Design*. Elsevier Butterworth- Heinemann, Third Edition, ISBN 0 7506 6168 2.
- Hufnagel W. (1992), *Manual del Aluminio*. Coca P (Versión en español), Company-Bueno J (Revisor). 2ª Edición. Barcelona: Editorial Reverté. 1992 Reimpresión 2004. 1133p. ISBN 84- 291-6011-6. Logan DL. (2007), *A first course in the finite element method*. 4º edición, Ed. Nelson, a division of Thomas Canada Limited. 2007. 826p. ISBN: 0-534-55298-6.
- Marwala T. (2010), *Finite Element Model Updating Using Computational Intelligence Techniques: Applications to Structural Dynamics*. Springerlink. London: Springer-Verlag. 2010. 254p. ISBN 978-1-84996-322-0. (doi: 10.1007/978-1-84996-323-7)

Marwala T. (1997), *A multiple criterion updating method for damage detection on structures*.

University of Pretoria-Thesis. 1997.

Mott RL. (1996), *Resistencia de materiales aplicada*. 3ª edición. Ed. Prentice Hall Hispanoamericana S.A., ISBN 9688808016.

Mthembu, L., Marwala, T., Friswell, et al. (2011), “Model selection in finite element model updating using the Bayesian evidence statistic”. *Mechanical Systems and Signal Processing*. Vol. 25 p. 2399-2412. (doi:10.1016/j.mssp.2011.04.001).

Stefanou G. (2008), “Review. The stochastic finite element method: Past, present and future”.

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 198 p. 1031-1051. (doi: 10.1016/j.cma.2008.11.007).

Vélez W, Gómez D, Thomson P. (2009), “Finite element model updating”. *Dyna*. Medellín, Junio de 2009. Vol. 76-158, p. 177 – 189. ISSN 0012 – 7353.

Wenhui M. (2010), “Stochastic finite element for structural vibration”. *Mathematical Problems in Engineering*. Vol. 2010 p. 1-19. Article ID 584863. (doi: 10.1155/2010/584863)

Xiao NC, Huang HZ, Wang Z, et al. (2011), “Reliability sensitivity for structural systems in interval probability form”. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Noviembre 2011. Vol. 44-5 p. 691-705. (doi: 10.1007/s00158-011-0652-9).

Yabushita M, Goda T, Ono Y, et al. (2008), “ valuation of Young’s modulus of high stiffness aluminium die cast alloys using nanoindentation technique”. *International Journal of Cast Metals Research*. (2008). Vol. 21-1 p. 180 – 185. (doi: 10.1179/136404608X361918)

Yang Q, Gao C, Chen W. (2009), “Stress analysis of a functional graded material plate with a circular hole”. *Archive of Applied Mechanics*. Vol. 80-8 p. 895 – 907. (doi:10.1007/s00419- 009-0349-3).

Zienkiewicz OC, Taylor RL, Zhu JZ, (2009), *El método de los elementos finitos*, Volumen 1, las bases. Bugada G, Cervera M, Oñate E (traductores). 6ª edición, Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería CIMNE. 2009. 914p. ISBN 9788496736719.